Curve C^1 e C^1 a tratti in $\mathbb{R}^n$

Definizioni ed esempi

Definizione 1. Sia $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua.

- Diciamo che γ *è di classe* $C^1([a, b])$ se ogni componente
$$\gamma_i : [a, b] \to \mathbb{R}$$
è di classe $C^1([a, b])$, ovvero se per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha che
  - γ_i è derivabile su (a, b);
  - esistono le derivate
$$\gamma_i'(a) := \lim_{t\to 0^+} \frac{\gamma_i(a + t) - \gamma_i(a)}{t} \qquad \text{e} \qquad \gamma_i'(a) := \lim_{s\to 0^-} \frac{\gamma_i(b + s) - \gamma_i(b)}{s} \ ;$$
  - la funzione $\gamma' = (\gamma_1', \gamma_2', \dots, \gamma_n') : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è continua.

- $\gamma'(t) = \big(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t)\big)$ è un *vettore tangente* alla curva γ nel punto $\gamma(t)$.
Se $\gamma'(t) \neq 0$, allora possiamo definire il vettore normalizzato
$$\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \in \mathbb{R}^n \ , \quad \text{dove} \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{\big(\gamma_1'(t)\big)^2 + \big(\gamma_2'(t)\big)^2 + \dots + \big(\gamma_n'(t)\big)^2} \ .$$
Il vettore $\dfrac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ è detto *versore tangente* alla curva nel punto $\gamma(t)$.

- Diciamo che $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è C^1 *a tratti* se γ è continua su $[a, b]$ e se esiste una partizione
$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$$
tale che $\gamma : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{R}^n$ è di classe $C^1([t_{j-1}, t_j])$ per ogni $j = 1, \dots, k$.

- Diciamo che la curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è *chiusa* , se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

- Diciamo che la curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è *semplice*, se $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva, ovvero se vale
$$\gamma(t) \neq \gamma(s) \quad \text{per ogni} \quad t \neq s \in (a, b).$$
Per esempio, la curva
$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$
è semplice.

Esempio 2. *La curva*
$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$
è semplice, chiusa e di classe C^1. Inoltre, il suo versore tangente è
$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$
Infatti, abbiamo $|\gamma'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$.

Esempio 3. *La curva*
$$\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$
è chiusa, ma non è semplice.

Esempio 4. *La curva*
$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$
è semplice, ma non chiusa. Infatti $\gamma(0) = (1, 0) \neq (-1, 0) = \gamma(\pi)$.

Esempio 5. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1([a,b])$. Allora la curva*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \big(t, f(t)\big),$$

è di classe C^1 è parametrizza il grafico di f. La curva γ è semplice, ma non chiusa. Inoltre,

$$\gamma'(t) = \big(1, f'(t)\big) \qquad e \qquad |\gamma'(t)| = \sqrt{1 + (\gamma'(t))^2}\ .$$

Concatenamento di curve

Definizione 6 (Concatenamento)**.** Date due curve

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad \sigma : [b,c] \to \mathbb{R}^n,$$

tali che $\gamma(b) = \sigma(b)$, definiamo il concatenamento $\gamma * \sigma : [a,c] \to \mathbb{R}^n$ come

$$\gamma * \sigma(t) := \begin{cases} \gamma(t), & \text{se} \quad t \in [a,b]; \\ \sigma(t), & \text{se} \quad t \in [b,c]. \end{cases}$$

Osserviamo che se γ e σ sono C^1 a tratti, allora anche la curva $\gamma * \sigma$ lo è.

Definizione 7. Date una curve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, definiamo la curva $\gamma_- : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ come

$$\gamma_-(t) := \gamma(a + b - t) \quad \text{per ogni} \quad t \in [a,b].$$

Osserviamo che se γ è C^1 a tratti, allora anche γ_- lo è. Inoltre,

- γ è chiusa $\Leftrightarrow$ γ_- è chiusa;
- γ è semplice $\Leftrightarrow$ γ_- è semplice;
- $\gamma'(t) = -\gamma_-'(a + b - t)$ e $|\gamma'|(t) = |\gamma_-'|(a + b - t)$ per ogni $t \in [a,b]$.

Esercizio 8. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) < y < g(x),$$

dove:

(1) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = x^4 - 1$.
(2) $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - x$.
(3) $f(x) = e^x$, $g(x) = 3 - 2e^{-x}$.

Esercizio 9. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del rettangolo* $[1,2] \times [3,4]$.

Esercizio 10. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x,y) \in B_1 \ : \ y \geq 0.$$

Esercizio 11. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x,y) \in B_1 \ : \ y \leq x, \ x \geq 0.$$

Esercizio 12. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x,y) \in (a,b) \times \mathbb{R} \ : \ g(x) < y < f(x),$$

dove:

(1) $(a,b) = (-1,1)$, $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -1 - x^2$.
(2) $(a,b) = (0,1)$, $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = -x^2 - x$.

Esercizio 13. *Trovare una curva semplice, chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo dell'insieme*

$$(x,y) \in B_{2\sqrt{2}} \ : \ x \geq 0, \ -x^2 - x \leq y \leq x^2 + x.$$